

Clasa a XII a mate-info

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} \\ \hat{0} & b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{ \hat{0} \} \right\}$.

a) Să se arate că (G, \cdot) este grup abelian, unde operația este de înmulțire a matricelor.

b) Să se arate că $A^6 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, pentru orice $A \in G$.

c) Să se arate că grupurile (G, \cdot) și $(\mathbb{Z}_{36}, +)$ nu sunt izomorfe.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z}, m, n \text{ impare} \right\}$ și $G = M \times \mathbb{Z}$. Pe G se definește operația "*" prin $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2)$, unde $q_1, q_2 \in M$ și $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

a) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Să se arate că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{Z}^*$, $f(q, k) = q \cdot 2^k$ este izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (\mathbb{Z}^*, \cdot) .

3. Să se determine:

a) $\int \frac{1}{x(x^{2012} + 1)} dx, x > 0$; b) $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$; c) $\int \frac{x+1}{x+e^{-x}} dx, x > 0$.

4. a) Să se arate că funcția $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este derivabilă.

b) Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are primitive pe \mathbb{R} .

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu punctaje de 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.